GEOMETRÍA EUCLÍDEA OLÍMPICA

1. Introducción

Estas notas corresponden al taller de preparación olímpica organizado por la Universidad de Sevilla durante el curso 18/19. Durante estos talleres daremos dos clases de geometría en las cuales veremos los resultados más importantes de la geometría euclidea para la resolución de problemas de olimpiada. Para tener una base sobre la que trabajar nos apoyaremos en [1]. En la primera sesión cubriremos los dos primeros capítulos, que tratan sobre caza de ángulos y resultados interesantes de circunferencias. En la segunda sesión, que abarca los dos siguientes capítulos, hablaremos sobre resultados de longitud y proporcionalidad de lados además de configuraciones que suelen aparecer en problemas. Ya después de realizar la fase local se dará una última sesión con resultados más avanzados.

2. Caza de Ángulos

En primer lugar recordamos los centros más importantes de un triángulo[1]:

1. El *ortocentro* de $\triangle ABC$ es la intersección de sus alturas.
2. El *baricentro* de $\triangle ABC$ es la intersección de las medianas.
3. El *incentro* de $\triangle ABC$ es la intersección de las bisectrices. Es el centro de la circunferencia inscrita.
4. El *circuncentro* es la intersección de las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita.

El resultado más básico para realizar caza de ángulos es el siguiente:

Proposición 2.1. *La suma de los ángulos de un triángulo es* $180°$*.*

Teorema 2.2. *Si* $\angle ACB$ *está inscrito en un círculo entonces sustenta a un arco igual a* $2\angle ACB$*.*

Problema 2.3. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo agudo $\triangle ABC$, respectivamente. Demostrar que $\angle BAH = \angle CAO$.

2.1. Cuadriláteros cíclicos.

Definición 2.4. Decimos que un cuadrilátero $ABCD$ es *cíclico* si puede ser inscrito en un circunferencia ω.

Proposición 2.5. *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero convexo. Entonces los siguientes hechos son equivalentes:*

1. $ABCD$ *es cíclico.*
2. $\angle ABC + \angle CDA = 180°$.
3. $\angle ABD = \angle ACD$.

2.2. El triángulo órtico.

Definición 2.6 (Triángulo Órtico)**.** Sea $\triangle ABC$ un triangulo, sean D, E, F los pies de la alturas de A, B, y C. Nos referimos a $\triangle DEF$ como el *triángulo órtico* de $\triangle ABC$.

Problema 2.7. Si consideremos $\triangle ABC$ y su correspondiente triángulo órtico $\triangle DEF$ entonces existe seis cuadriláteros cíclicos con vértices $\{A, B, C, D, E, F, H\}$. Encuéntralos todos.

Vamos a utilizar el problema anterior para ver el siguiente.

Problema 2.8. Sea $\triangle DEF$ el triángulo órtico de $\triangle ABC$ y H su ortocentro. Demostrar que H es el incentro de $\triangle DEF$.

Problema 2.9. Sea H el ortocentro de $\triangle ABC$. Sea X la reflexión de H respecto a $\overline{BC}$ e Y la reflexión respecto al punto medio de $\overline{BC}$.

1. Demostrar que X se encuentra en (ABC).
2. Demostrar que $\overline{AY}$ es el diámetro de (ABC).

[1] Actualmente se han identificado más de 9717 centros de triángulos. Una lista se puede consultar en [2]

2.3. El lema del incentro/excentro. Veamos ahora propiedades intereresantes del incentro. Como en el apartado anterior los cuadriláteros cíclicos estarán muy presentes.

Lema 2.10. *Sea $\triangle ABC$ y sea su incentro I. El segmento AI corta a (ABC) otra vez en L. Sea I_A la reflexión de I sobre L. Entonces.*

1. *Los puntos $I, B, C,$ y I_A se encuentran en una circunferencia de diámetro $\overline{II_A}$ y centro L. En particular, $LI = LB = LC = LI_A$.*
2. *Los rayos BI_A y CI_A bisecan a los ángulos exteriores de $\triangle ABC$.*

Demostración. Ejercicio. □

2.4. Ángulos Dirigidos. En la utilización de los teoremas anteriores, y en muchos de los que están por venir, se simplifica mucho su utilización si utilizamos ángulos dirigidos módulo 180°. A estos ángulos los denotaremos con el símbolo $\measuredangle$. Consideramos que $\measuredangle ABC$ es positivo si los vértices A, B, C se encuentran en el sentido de las agujas del reloj, y negativo si pasa lo contrario. La importancia de los ángulos dirigidos reside en el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Los puntos A, B, X, Y se encuentran en una circunferencia si y solo si*

$$\measuredangle AXB = \measuredangle AYB.$$

Vemos que es una simplificación del teorema anterior para cuadriláteros cíclicos. Además los ángulos dirigidos cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 2.12. *Para los puntos cualesquiera A, B, C, P en el plano, se tiene.*

1. $\measuredangle APA = 0$.
2. $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$.
3. $\measuredangle PBA = \measuredangle PBC$ *si y solo si* A, B, C *son colineares.*
4. *Si* $\overline{AP} \perp \overline{BP}$, *entonces* $\measuredangle APB = \measuredangle BPA = 90°$.
5. $\measuredangle APB + \measuredangle BPC = \measuredangle APC$.
6. $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0$.
7. $AB = AC$ *si y solo si* $\measuredangle ACB = \measuredangle CBA$.
8. *Si* (ABC) *tiene centro* P, *entonces* $\measuredangle APB = 2\measuredangle ACB$.
9. *Si* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, *entonces* $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 0$.

Lema 2.13. *Los puntos D, E, F se encuentran en las rectas BC, CA, y AB de $\triangle ABC$, respectivamente. Entonces existe un punto que se encuentra en las tres circunferencias (AEF), (BFD), (CDE).*

2.5. Tangentes a una circunferencia.

Proposición 2.14. *Sea O el centro de la circunferencia circunscrita a $\triangle ABC$. Sea P un punto en el plano. Entonces lo siguiente es equivalente.*

1. $\overline{PA}$ *es tangente a* (ABC).
2. $\overline{OA} \perp \overline{AP}$.
3. $\measuredangle PAB = \measuredangle ACB$.

2.6. Problemas.

Problema 2.15. Sea $\triangle ABC$ un triángulo agudo con circuncentro, O, y sea K un punto tal que $\overline{KA}$ es tangente a (ABC) y $\angle KCB = 90°$. El punto D se encuentra en $\overline{BC}$ de tal forma que $\overline{KD} \parallel \overline{AB}$. Demostrar que el segmento $\overline{DO}$ pasa por A.

Problema 2.16. Sea $\triangle ABC$ un triángulo agudo con D, E, F los pies de las alturas en $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ respectivamente. Sea P una de las intersecciones de la recta EF y (ABC). Sea Q el punto de encuentro de BP y DF. Demostrar que $AP = AQ$.

Lema 2.17 (Recta de Simson)**.** *Dado $\triangle ABC$ y P un punto cualquiera en (ABC). Sean X, Y, Z los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB. Demostrar que los puntos X, Y, Z son colineares.*

Problema 2.18. Sea ABC un triángulo agudo y H su ortocentro, sea W un punto en el lado $\overline{BC}$, entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas de B y C, respectivamente. ω_1 es la circunferencia circunscrita al triángulo BWM y X es un punto tal que $\overline{WX}$ es el diámetro de ω_1. Igualmente, ω_2 es la circunferencia circunscrita del triángulo CWM y Y es un punto tal que $\overline{WX}$ es el diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos $X, Y,$ y H son colineares.

3. Circunferencias

3.1. Orientación de triángulos similares.

Definición 3.1. Sean $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$. Decimos que son directamente similares si

$$\measuredangle ABC = \measuredangle XYZ,\ \measuredangle BCA = \measuredangle YZX \text{ y} \measuredangle CAB = \measuredangle ZXY.$$

Decimos que son *opuestamente similares*, o similares y opuestamente orientados, si:

$$\measuredangle ABC = -\measuredangle XYZ,\ \measuredangle BCA = -\measuredangle YZX \text{ y } \measuredangle CAB = -\measuredangle ZXY.$$

Si son directamente u opuestamente similares decimos que son *similares* y escribimos:

$$\triangle ABC \sim \triangle XYZ.$$

Veamos una caracterización para ver que dos triángulos son equivalentes.

Proposición 3.2. *Sea $\triangle ABC$ y $\triangle XYZ$ entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$.
2. $\angle A = \angle X$ *y* $\angle B = \angle Y$.
3. $\angle B = \angle Y$ *y* $AB : XY = BC : YZ$.
4. $AB : XY = BC : YZ = CA : ZX$.

3.2. Potencia de un punto. Consideramos ahora cuatro puntos A, B, X, Y de una circunferencia ω. Las rectas AB y XY cortan a ω en P. Utilizando caza de ángulos se obtiene facilmente que:

$$\measuredangle PAY = \measuredangle BAY = \measuredangle BXY = \measuredangle BXP = -\measuredangle PXB$$

y

$$\measuredangle AYP = \measuredangle AYZ = \measuredangle ABX = \measuredangle PBX = -\measuredangle XBP.$$

Por lo tanto tenemos que $\triangle PAY$ es opuestamente similar a $\triangle PXB$. Por la proposición anterior tenemos que:

$$\frac{PA}{PY} = \frac{PX}{PB}$$

o

$$PA \cdot PB = PX \cdot PY$$

Hemos obtenido un resultado interesante. El producto $PA \cdot PB$ no depende de la recta AB, solamente lo hace del punto P. Podemos tomar, de todas las posibilidades posibles la recta que pasa por el origen O de ω obteniendo

$$PA \cdot PB = |PO - r|\,|PO + r|$$

Definición 3.3 (Potencia de un punto)**.** En la configuración descrita anteriormente definimos la *potencia de un punto* respecto a una circunferencia ω como:

$$Pow_\omega(P) = OP^2 - r^2$$

La potencia de un punto es muy útil gracias a los siguientes teoremas.

Teorema 3.4. *Sea ω una circunferencia y P un punto arbitrario. Entonces:*

1. *$Pow_\omega(P)$ es positiva, cero o negativa dependiendo de si P está fuera, en o dentro de ω, respectivamente.*
2. *Si l es una recta desde P que corta a ω en dos puntos distintos X e Y, entonces*
$$PX \cdot PY = |Pow_\omega(P)|$$
3. *Si P se encuentra fuera de ω y $\overline{PA}$ es tangente a ω en un punto A en ω, entonces*
$$PA^2 = Pow_\omega(P)$$

La potencia de un punto también nos permite encontrar cuadriláteros cíclicos según longitudes.

Teorema 3.5. *Sean A, B, X, Y cuatro puntos distintos en el plano y sea P la intersección de las rectas AB, XY. Supongamos que P se encuentra en ambos segmentos $\overline{AB}, \overline{XY}$, o en ninguno de ambos. Si $PA \cdot PB = PX \cdot PY$, entonces A, B, X, Y son concíclicos.*

Problema 3.6. Demostrar el *Teorema de Pitágoras.*

3.3. El eje y el centro radical.

Definición 3.7 (Eje radical)**.** Sean ω_1, ω_2 dos circunferencias con centros distintos, el *eje radical* de las círcunferencias es el conjunto de puntos que cumplen

$$Pow_{\omega_1}(P) = Pow_{\omega_2}(P).$$

La utilidad del eje radical reside en los siguientes dos teoremas.

Teorema 3.8 (Eje Radical)**.** *Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencia con centros distintos O_1 y O_2 entonces sus ejes radicales forman una recta perpendicular $\overline{O_1O_2}$. En particular, si ω_1 y ω_2 se cortan en dos puntos A y B, entonces el eje radical es la recta AB.*

Demostración. Ejercicio □

Teorema 3.9. *Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias con centros O_1 y O_2. Seleccionamos los puntos A y B en ω_1 y los puntos C y D en ω_2. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *A, B, C, D se encuentran en una circunferencia de centro O_3 (no en la recta O_1O_2).*
2. *Las rectas AB y CD se cortan en el eje radical de ω_1 y ω_2.*

3.4. Problemas.

Problema 3.10. Sean X e Y los puntos de corte de ω_1 y ω_2, sea l_1 la recta que pasa por el centro de ω_1 y P y Q sus puntos de corte con ω_2. Sea l_2 la recta que pasa por el centro de ω_2 con R y S sus puntos de corte con ω_1. Probar que si P, Q, R y S se encuentran en una circunferencia entonces su centro se encuentra en la recta XY.

Problema 3.11 (Teorema de Euler)**.** Sea $\triangle ABC$. Sean R y r su circunradio e inradio, respectivamente. Sean O e I su circuncentro e incentro. Entonces $OI^2 = R(R - 2r)$. En particular, $R \geq 2r$.

Problema 3.12. El triángulo $\triangle ABC$ tiene perímetro 4. Los puntos X e Y se encuentran el las rectas AB y AC, respectivamente, tal que $AX = AY = 1$. Los segmentos BC y XY se cortan en M. Demostrar que el perímetro de $\triangle ABM$ o $\triangle ACM$ es 2.

Problema 3.13. Sea H el ortocentro de un triángulo agudo ABC. La circunferencia Γ_A centrada en el punto medio de $\overline{BC}$ y pasando por H corta al lado BC en los puntos A_1 y A_2. Igualmente, definimos los puntos B_1, B_2, C_1, y C_2. Probar que los puntos A_1, A_2, B_1,B_2, C_1 y C_2 son concíclicos.

Referencias

[1] Evan Chen: *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads, MAA Press, 2016.*
[2] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETCPart5.html